点推定の一例 : 区間(0,θ]上の一様分布にしたがう観測値にもとづく, θの種々の推定量 (統計的決定函数のAdmissibilityの研究報告集)

AUTHOR(S):

森本, 治樹

CITATION:

森本, 治樹. 点推定の一例 : 区間(0,θ]上の一様分布にしたがう観測値にもとづく, θの種々の推定量 (統計的決定函数のAdmissibilityの研究報告集). 数理解析研究所講究録 1967, 27: 93-98

ISSUE DATE:

1967-09

URL:

http://hdl.handle.net/2433/107519

数理解析研究所講究録
27巻 1967年 93-98

点推定問題の一例

区間 $(0,\theta]$ 上の一様分布にしたがう観測値にもとづく，θ の種々の推定量

大阪市大 理学部 森本治樹

区間 $(0,\theta]$ 上の一様分布を P_θ と書く．これはこの本の草間氏の報告 §2，定理3の特殊な場合で，$r(x)=1$，$g(\theta)=1/\theta$ であるものをいうのである．θ の推定とは $\alpha=1$ であるということだから，2乗損失関数の下では

［定理A］（Karlin） 推定量 $\varphi_0(x)=\frac{3}{2}x$ は AD（admissible の略）．$\varphi(x)=kx$ $(k\neq 3/2)$ は IAD（inadmissible の略）．

この問題に直接適用できる定理を，もう一つ挙げておく．

［定理B］（工藤[53]） 標本空間 $\mathcal{X}=\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{X}_i$，母数空間 $\Theta=\sum_{i=1}^{\infty}\Theta_i$ という分割が，

$$P_\theta\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\mathcal{X}_i\right)=0,\quad \theta\in\Theta_n;\ n=1,2,\cdots,$$

という条件を満足すると仮定する. ξ_i は Θ 上の σ 有界測度で $\xi_i(\Theta_i)=1$ であるとする $(i=1,2,\dots)$. また

$$r_i(\xi_i, \varphi) = \int_{\Theta_i}\int_{\mathfrak{X}_i} L(\varphi(x), \theta)\, dP_\theta(x)\, d\xi_i(\theta)$$

と定義する.

さらに推定量 φ^* が次の条件をみたすとする.

もしも $\mathfrak{X}_i$ 上で $\varphi^\dagger(x) = \varphi^*(x)$ a.e. P_θ, $\theta\in\Theta$ でない限り

$$r_i(\xi_i, \varphi^*) < r_i(\xi_i, \varphi^\dagger).$$

以上の前提のもとで, もしもある推定量 φ に対して

$$r_\varphi(\theta) \leqq r_{\varphi^*}(\theta) \qquad \theta\in\Theta$$

なら, それぞれの ξ_i について殆ど到る所で

$$r_\varphi(\theta) = r_{\varphi^*}(\theta).$$

現在の問題に対しては $\mathfrak{X}=\Theta=(0,\infty)$, $L(\varphi(x),\theta)=(\varphi(x)-\theta)^2$ と仮定しており, また終結部の下線の個所は不要であることが容易に示される. つまり φ^* は AD になる事を注意しておく.

§1. θ の推定量としてどのようなものが AD になるかを考えるのであるが, 最初に次の2つのことはすぐにわかる.

[C]　$\varphi(x)$ が AD $\Rightarrow$ $\varphi(x) \geq x$.

[D]　　〃　　$\Rightarrow$ $\varphi(x)$ は単調増大.

何故なら, $\bar{\varphi}(x) = \mathrm{Max}(\varphi(x), x)$, $\bar{\bar{\varphi}}(x) = y(\mu[\varphi_1(x) < y] \leq x \leq \mu[\varphi_1(x) = y])$ とおけば $r_\varphi(\theta) \geq r_{\bar{\varphi}}(\theta) \geq r_{\bar{\bar{\varphi}}}(\theta)$ で, それぞれの等号がすべての $\theta \in \Theta$ について成立つのは両辺にあらわれる2つの推定量が互いに相等しいときだけである. なお μ は Lebesgue 測度をあらわす.

§2. しばらく問題をさらに特殊化して $\Theta = \{1, 2, \cdots, n\}$ とする. このとき最小十分統計量は $[x]$ となるので, [C], [D] のほかにさらに

[E]　$\varphi(x)$ が AD $\Rightarrow$ $\varphi(x)$ は $[x]$ の関数.

そこで $[x] = i$ のときの φ の値を y_i とおく. また Θ 上に確率測度 ξ をとり, $\xi(\{i\}) = \xi_i$ とおく. ξ に対する Bayes 解は次の形で与えられる([13]):

$$y_i = \frac{\sum_{k=i}^{n} \xi_i}{\sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k} \xi_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

この φ が一意にきまるのは $\xi_n \neq 0$ のときで, そのとき φ は AD なのであるから, 逆にどのような φ が (1) の形に書けるかが問題になる. 結果は簡単で,

[F] $n \geq y_i$, $y_{i+1} \geq y_i$, $y_i > i$ $(i=1,2,\dots n)$ ならば φ は (1) の形に書け，従ってAD.

何らかの i に対して $y_i = i$ となる場合は，$\xi_{i+1} = \cdots = \xi_n = 0$ となる．このようなときは $\mathscr{X}$ 及び Θ を $(0, i]$ および $(i, n]$ に分割して，それぞれの中で同じことを行い，[定理B] を援用すれば，そのようなものもADであることが示される．$y_i = i$ となるような i がいくつあっても，分割をさらに細かくすればよいだけであるから，

[G] $n \geq y_i$, $y_{i+1} \geq y_i$, $y_i \geq i$ $(i=1,2,\dots,n)$ ならば φ はAD.

これは [C][D][E] の逆になっている．それ故この問題に対しては，[G] の条件をみたす φ が最小完全類をなしていることがわかるのである．

§3. もとの問題にかえって，$\Theta = (0, \infty]$ を任意の可算個の点例 $0 = \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \cdots$ を用いて $\Theta = \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i$, $\Theta_i = (\theta_i, \theta_{i+1}]$ に分割し，これに [定理B] を適用することにする．各々の Θ_i の中に有限個の点列 $\theta_i = \theta_{i1} < \theta_{i2} < \cdots < \theta_{i+1}$ を取る．[定理B] において ξ_i としては，これら有限個の点にのみ重さをもつ測度を考えれば，“どのような φ^* がこの定理の条件をみたすか？” という問題は各 $X_i = (\theta_i, \theta_{i+1}]$ の上

で §2．と同じ問題を解くことに帰着する．したがって，

［F］ $\varphi(x)$ が単調増加階段関数で，$\sup\{x\,;\,\varphi(x)=x\}=\infty$ ならば，$\varphi(x)$ は AD．

また §2 と同様に "どのような φ が，もとの問題の Bayes 解となっているか？" ということを調べることもできる．すなわち Θ 上の先験分布 ξ が存在して，それについての φ の事後危険が殆ど確実に有限であり，かつ

$$\varphi(x)=\frac{\int_x^\infty d\xi(\theta)}{\int_x^\infty \frac{1}{\theta}d\xi(\theta)} \tag{2}$$

となるとき $\varphi(x)$ は ξ に対する Bayes解であり，それ以外に Bayes 解がなければ AD である．例えばここで，$\varphi(x)$ が x に関して微分可能な関数であるとし，$d\xi(\theta)=\xi(\theta)d\theta$, $\int_x^\infty \frac{1}{\theta}\xi(\theta)\,d\theta=A(x)$，すなわち $-\xi(\theta)=\theta A'(\theta)$ とおけることに注意して (2) を変形すると

$$A(x)\,\varphi'(x)+A'(x)(x-\varphi(x))=0$$

という微分方程式となる．これから $A(x)$ を求めることは容易であり，それから導かれる ξ についての φ の事後危険が有限になるための条件も求められる．

§4．他方，［定理A］から想像されることは

[H] $\varphi(x) \geq \varphi_0(x)$, $x \leq x_1$

$$\varphi(x) > \varphi_0(x) + \varepsilon_3 (x - x_1) \qquad x > x_1$$

あるいは,

$$\varphi(x) \leq \varphi_0(x) \qquad x \leq x_1$$

$$\varphi(x) < \varphi_0(x) - \varepsilon_4 (x - x_1) \qquad x > x_1$$

ならば $\varphi(x)$ はIAD.

このことは $\varphi(x)$ と, $\varphi_1(x) = \varphi(x)$, $x \leq x_1$, $\varphi_1(x) = \varphi(x) + C(x - x_1)$ との危険関数を比較することによって容易に証明できる.